

潮汐分析和预报的准调和分潮方法

II. 短期观测的分析*

方 国 洪

(中国科学院海洋研究所)

目前,调和法仍然是潮汐的分析和预报中的一种主要的基本方法,其关键在于求得尽可能准确的调和常数。在潮汐分析中,经常遇到的是对于中、长期(半个月以上)记录的处理,对于这样的资料,已有许多良好的分析方法可以采用。但是,有时我们也会遇到需要处理的短期观测资料,特别对于潮流,由于对它进行观测比水位观测要困难,常常不能获得较长期的记录,而需要从短期记录中分析出调和常数来。处理短期记录的方法也有不少,其中较为常用的是英国海军部的几种方法^[3,4]。这些方法只能处理一次或二次周日观测记录,当观测天数较多时,只能分组进行计算得到几组调和常数,然后再求平均值。由于各组的天文条件的差别,调和常数的准确度常常有相当大的差异,而计算平均值时却没有加权,这就影响了结果的可靠性。本文建议的方法将可以直接分析任意多次周日观测记录,因而简化了计算并能得到更准确的结果。

一、方 法 1

假设于某一地点进行了 N 次($N \geq 2$)周日逐时观测,每次周日观测给出了连续24个整小时的潮高值,但是各次周日观测之间则可以是间断的。在这一节中我们将讨论如何由这 N 次周日观测值来计算出 $O_1, K_1, M_2, S_2, M_4, MS_4$ 六个分潮的调和常数。

1. 潮族的分离

计算的第一个步骤是分别对每次周日观测进行的,目的在于计算出各天日平均水位及全日、半日和四分日潮族的振幅和初位相。由于每一潮族包含着许多不同频率的分潮,从一周日潮高记录中将各族完全分离开来是不可能的,因而在这一步骤中只能求得各潮族近似的振幅和初位相。为了做到这一点,可以设计出许多种过滤算子。其中最准确的是根据最小二乘法得出的数列,但是这些数列系由余弦函数所构成,对于人工计算较为不便;另一种是Doodson设计的,在“英国海军部方法”中采用的算子^[2,4],它仅仅用到 ± 1 和 0 作为乘数,十分方便,它在消去随机误差的效能方面稍差一些,但差别不十分显著。因此下面将采用后面一种算子。

假设某次周日观测的潮高序列为

$$Z = (\zeta_{i-11.5}, \zeta_{i-10.5}, \dots, \zeta_{i-0.5}, \zeta_{i+0.5}, \dots, \zeta_{i+10.5}, \zeta_{i+11.5}) \quad (1)$$

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第365号。

其中 $\bar{t}$ 代表这次周日观测的中间时刻¹⁾。我们认为 ζ 与由六个准调和分潮加上日平均水位所表示的理论值仅相差一个随机的量值, 这个量值通常称为“余差”。余差对计算结果的影响我们将留在第三节中讨论, 现在暂时把它略去。于是, 由文献[1]知潮高 ζ_t 可表示为

$$\zeta_t = X_0 + \sum_c D_c H_c \cos(p_c 15^\circ t - d_c - g_c) \quad (2)$$

式中 $C = O_1, K_1, M_2, S_2, M_4, MS_4$; $\sum_c$ 表示对六个分潮求和; $p_c = 1$ (对 O_1, K_1), 2 (对 M_2, S_2) 或 4 (对 M_4, MS_4)。式(2)中 D, d 值是随时间变化的。文献[1]已指出, 在一个较短的时段内, 振幅系数和角速率近似地可视为不变, 且角速率可取成与相应调和分潮相等。为了使新的表示式与式(2)在 $\bar{t}$ 时刻具有相同的量值, 这个表示式应当写成

$$\zeta_t = X_0 + \sum_c \bar{D}_c H_c \cos[\sigma_c(t - \bar{t}) + p_c 15^\circ \bar{t} - \bar{d}_c - g_c] \quad (3)$$

这里 σ_c 是调和分潮 C 的角速率; 符号 $\bar{D}$ 和 $\bar{d}$ 表示 $\bar{t}$ 时刻的 D 和 d 值。

我们把 Doodson 给出的乘数矩阵记为 W ,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

1) 在文献[1]中记为 t_m 。

则将 Z 与 W 相乘可得

$$ZW = (U_0^*, U_1^*, V_1^*, U_2^*, V_2^*, U_4^*, V_4^*) \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} U_0^* = 24X_0 + \sum_C I_{U_0,C} \bar{D}_C H_C \cos(\bar{d}_C + g_C - p_C 15^\circ \bar{t}) \\ U_q^* = \sum_C I_{U_q,C} \bar{D}_C H_C \cos(\bar{d}_C + g_C - p_C 15^\circ \bar{t}) \\ V_q^* = \sum_C I_{V_q,C} \bar{D}_C H_C \sin(\bar{d}_C + g_C - p_C 15^\circ \bar{t}) \end{cases} \quad (6)$$

这里, $q = 1, 2, 4$; $I_{U_0,C}$, $I_{U_q,C}$, $I_{V_q,C}$ 为与分潮角速率有关的常数:

$$\begin{cases} I_{U_0,C} = 8 \cos 6\sigma_C \cos 3\sigma_C \cos 1.5\sigma_C (1 + 2 \cos \sigma_C) \\ I_{U_1,C} = 8 \sin 6\sigma_C \sin 3\sigma_C \cos 1.5\sigma_C (1 + 2 \cos \sigma_C) \\ I_{V_1,C} = 8 \sin 6\sigma_C \cos 3\sigma_C \cos 1.5\sigma_C (1 + 2 \cos \sigma_C) \\ I_{U_2,C} = -8 \cos 6\sigma_C \sin 3\sigma_C \sin 1.5\sigma_C (1 + 2 \cos \sigma_C) \\ I_{V_2,C} = -8 \cos 6\sigma_C \sin 3\sigma_C \cos 1.5\sigma_C (1 + 2 \cos \sigma_C) \\ I_{U_4,C} = -16 \cos 6\sigma_C \cos 3\sigma_C \sin 1.5\sigma_C \sin \sigma_C \\ I_{V_4,C} = -8 \cos 6\sigma_C \cos 3\sigma_C \sin 1.5\sigma_C (1 + 2 \cos \sigma_C) \end{cases} \quad (7)$$

其具体数值见表 1。由表可以看出, U_1^* 和 V_1^* 的主要贡献来自 O_1 和 K_1 分潮; 同样, U_2^* 和 V_2^* 主要来自 M_2 和 S_2 ; U_4^* 和 V_4^* 主要来自 M_4 和 MS_4 。

为了计算方便, 我们引入

表 1 $I_{U_0,C}$, $I_{U_q,C}$, $I_{V_q,C}$; $I_{X_0,C}$, $I_{X_q,C}$, $I_{Y_q,C}$ 及 $J_{X_0,C}$, $J_{X_q,C}$, $J_{Y_q,C}$ 的数值

C	O_1	K_1	M_2	S_2	M_4	MS_4
$I_{U_0,C}$	1.81	-0.07	-0.84	0.00	-0.85	-0.43
$I_{U_1,C}$	14.57	15.35	1.69	0.00	-0.02	0.00
$I_{V_1,C}$	16.28	15.28	0.09	0.00	0.18	0.05
$I_{U_2,C}$	-0.62	0.03	15.03	15.45	-1.71	-0.86
$I_{V_2,C}$	-1.62	0.07	15.85	15.45	-0.09	-0.03
$I_{U_4,C}$	-0.11	0.00	0.28	0.00	13.16	13.60
$I_{V_4,C}$	-0.69	0.03	0.80	0.00	16.00	16.12
$I_{X_0,C}$	0.075	-0.003	-0.035	0.000	-0.035	-0.018
$I_{X_1,C}$	0.949	1.000	0.110	0.000	-0.001	0.000
$I_{Y_1,C}$	1.065	1.000	0.006	0.000	0.012	0.003
$I_{X_2,C}$	-0.041	0.002	1.000	1.028	-0.114	-0.057
$I_{Y_2,C}$	-0.102	0.004	1.000	0.975	-0.006	-0.002
$I_{X_4,C}$	-0.008	0.000	0.021	0.000	1.000	1.033
$I_{Y_4,C}$	-0.043	0.002	0.050	0.000	1.000	1.008
$J_{X_0,C}$	-0.075	0.003	0.035	0.000	0.035	0.018
$J_{X_1,C}$	0.051	0.000	-0.110	0.000	0.001	0.000
$J_{Y_1,C}$	-0.065	0.000	-0.006	0.000	-0.012	-0.003
$J_{X_2,C}$	0.041	-0.002	0.000	-0.028	0.114	0.057
$J_{Y_2,C}$	0.102	-0.004	0.000	0.025	0.006	0.002
$J_{X_4,C}$	0.008	0.000	-0.021	0.000	0.000	-0.033
$J_{Y_4,C}$	0.043	-0.002	-0.050	0.000	0.000	-0.008

$$\left\{ \begin{array}{l} (X_0^*, I_{X_0, O_1}, I_{X_0, K_1}, \dots, I_{X_0, MS_4}) = (U_0^*, I_{U_0, O_1}, I_{U_0, K_1}, \dots, I_{U_0, MS_4})/24 \\ (X_1^*, I_{X_1, O_1}, I_{X_1, K_1}, \dots, I_{X_1, MS_4}) = (U_1^*, I_{U_1, O_1}, I_{U_1, K_1}, \dots, I_{U_1, MS_4})/I_{U_1, K_1} \\ (Y_1^*, I_{Y_1, O_1}, I_{Y_1, K_1}, \dots, I_{Y_1, MS_4}) = (V_1^*, I_{V_1, O_1}, I_{V_1, K_1}, \dots, I_{V_1, MS_4})/I_{V_1, K_1} \\ (X_2^*, I_{X_2, O_1}, I_{X_2, K_1}, \dots, I_{X_2, MS_4}) = (U_2^*, I_{U_2, O_1}, I_{U_2, K_1}, \dots, I_{U_2, MS_4})/I_{U_2, M_2} \\ (Y_2^*, I_{Y_2, O_1}, I_{Y_2, K_1}, \dots, I_{Y_2, MS_4}) = (V_2^*, I_{V_2, O_1}, I_{V_2, K_1}, \dots, I_{V_2, MS_4})/I_{V_2, M_2} \\ (X_4^*, I_{X_4, O_1}, I_{X_4, K_1}, \dots, I_{X_4, MS_4}) = (U_4^*, I_{U_4, O_1}, I_{U_4, K_1}, \dots, I_{U_4, MS_4})/I_{U_4, M_4} \\ (Y_4^*, I_{Y_4, O_1}, I_{Y_4, K_1}, \dots, I_{Y_4, MS_4}) = (V_4^*, I_{V_4, O_1}, I_{V_4, K_1}, \dots, I_{V_4, MS_4})/I_{V_4, M_4} \end{array} \right. \quad (8)$$

则有

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^* = X_0 + \sum_c I_{X_0, c} \bar{D}_c H_c \cos(\bar{d}_c + g_c - p_c 15^\circ \bar{t}) \\ X_q^* = \sum_c I_{X_q, c} \bar{D}_c H_c \cos(\bar{d}_c + g_c - p_c 15^\circ \bar{t}) \\ Y_q^* = \sum_c I_{Y_q, c} \bar{D}_c H_c \sin(\bar{d}_c + g_c - p_c 15^\circ \bar{t}) \end{array} \right. \quad (9)$$

式中 $I_{X_0, c}$, $I_{X_q, c}$, $I_{Y_q, c}$ 的具体数值见表 1。

今引入

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \bar{D}_{O_1} H_{O_1} \cos(\bar{d}_{O_1} + g_{O_1} - 15^\circ \bar{t}) + \bar{D}_{K_1} H_{K_1} \cos(\bar{d}_{K_1} + g_{K_1} - 15^\circ \bar{t}) \\ Y_1 = \bar{D}_{O_1} H_{O_1} \sin(\bar{d}_{O_1} + g_{O_1} - 15^\circ \bar{t}) + \bar{D}_{K_1} H_{K_1} \sin(\bar{d}_{K_1} + g_{K_1} - 15^\circ \bar{t}) \\ X_2 = \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \cos(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2} - 30^\circ \bar{t}) + \bar{D}_{S_2} H_{S_2} \cos(\bar{d}_{S_2} + g_{S_2} - 30^\circ \bar{t}) \\ Y_2 = \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \sin(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2} - 30^\circ \bar{t}) + \bar{D}_{S_2} H_{S_2} \sin(\bar{d}_{S_2} + g_{S_2} - 30^\circ \bar{t}) \\ X_4 = \bar{D}_{M_4} H_{M_4} \cos(\bar{d}_{M_4} + g_{M_4} - 60^\circ \bar{t}) + \bar{D}_{MS_4} H_{MS_4} \cos(\bar{d}_{MS_4} + g_{MS_4} - 60^\circ \bar{t}) \\ Y_4 = \bar{D}_{M_4} H_{M_4} \sin(\bar{d}_{M_4} + g_{M_4} - 60^\circ \bar{t}) + \bar{D}_{MS_4} H_{MS_4} \sin(\bar{d}_{MS_4} + g_{MS_4} - 60^\circ \bar{t}) \end{array} \right. \quad (10)$$

则由式(9)可得

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = X_0^* + \sum_c J_{X_0, c} \bar{D}_c H_c \cos(\bar{d}_c + g_c - p_c 15^\circ \bar{t}) \\ X_q = X_q^* + \sum_c J_{X_q, c} \bar{D}_c H_c \cos(\bar{d}_c + g_c - p_c 15^\circ \bar{t}) \\ Y_q = Y_q^* + \sum_c J_{Y_q, c} \bar{D}_c H_c \sin(\bar{d}_c + g_c - p_c 15^\circ \bar{t}) \end{array} \right. \quad (11)$$

式中 J 的数值很容易由 I 换算过来, 其结果也已列于表 1 中。由表可知, J 是一些相当小的系数。

若令

$$\left\{ \begin{array}{l} F_q \cos \varphi_q = X_q \\ F_q \sin \varphi_q = Y_q \end{array} \right. \quad (12)$$

$$f_q = \varphi_q + q 15^\circ \bar{t} \quad (13)$$

及

$$\left\{ \begin{array}{l} A_q = F_q \cos f_q \\ B_q = F_q \sin f_q \end{array} \right. \quad (14)$$

则根据式(10), 有

$$\begin{cases} \bar{D}_{O_1} H_{O_1} \cos(\bar{d}_{O_1} + g_{O_1}) + \bar{D}_{K_1} H_{K_1} \cos(\bar{d}_{K_1} + g_{K_1}) = A_1 \\ \bar{D}_{O_1} H_{O_1} \sin(\bar{d}_{O_1} + g_{O_1}) + \bar{D}_{K_1} H_{K_1} \sin(\bar{d}_{K_1} + g_{K_1}) = B_1 \\ \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \cos(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2}) + \bar{D}_{S_2} H_{S_2} \cos(\bar{d}_{S_2} + g_{S_2}) = A_2 \\ \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \sin(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2}) + \bar{D}_{S_2} H_{S_2} \sin(\bar{d}_{S_2} + g_{S_2}) = B_2 \\ \bar{D}_{M_4} H_{M_4} \cos(\bar{d}_{M_4} + g_{M_4}) + \bar{D}_{MS_4} H_{MS_4} \cos(\bar{d}_{MS_4} + g_{MS_4}) = A_4 \\ \bar{D}_{M_4} H_{M_4} \sin(\bar{d}_{M_4} + g_{M_4}) + \bar{D}_{MS_4} H_{MS_4} \sin(\bar{d}_{MS_4} + g_{MS_4}) = B_4 \end{cases} \quad (15)$$

式(15)给出了调和常数与 A_q , B_q 之间的关系。由上可以看到, 只要对潮高序列 Z 作运算 ZW , 然后通过式(8)的变换, 便可算得 X_0^* , X_q^* , Y_q^* 。若式(11)中右边第二项已知, 则可算得 X_0 , X_q , Y_q , 从而借助式(12)、(13)、(14)即得 A_q , B_q 。因此现在面临的问题是如何由 A_q , B_q 根据式(15)来计算出调和常数。当然式(11)右边第二项中还包含着欲求的调和常数, 但是由于诸 J 值均是小量, 故可以采用迭代法求解。即, 首先将式(11)右边第二项略去, 以 X_0^* , X_q^* , Y_q^* 代替 X_0 , X_q , Y_q , 算出调和常数的近似值, 然后将所得调和常数代入式(11), 即可算得足够准确的 X_0 , X_q , Y_q 值。

在本节的下面一大段和第二节里, 我们将要讨论方程组(15)的求解问题。由于(15)可分为三组形式完全相同的方程, 在讨论中将都以半日族为例来说明。

2. 调和常数的计算

由前面的讨论可知, 每一次周日观测可给出两个关于半日族的方程:

$$\begin{cases} \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \cos(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2}) + \bar{D}_{S_2} H_{S_2} \cos(\bar{d}_{S_2} + g_{S_2}) = A_2 \\ \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \sin(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2}) + \bar{D}_{S_2} H_{S_2} \sin(\bar{d}_{S_2} + g_{S_2}) = B_2 \end{cases} \quad (16)$$

置

$$\begin{cases} \bar{D}_{M_2} \cos \bar{d}_{M_2} = a_M, \quad \bar{D}_{M_2} \sin \bar{d}_{M_2} = b_M \\ \bar{D}_{S_2} \cos \bar{d}_{S_2} = a_S, \quad \bar{D}_{S_2} \sin \bar{d}_{S_2} = b_S \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} H_{M_2} \cos g_{M_2} = x_{M_2}, \quad H_{M_2} \sin g_{M_2} = y_{M_2} \\ H_{S_2} \cos g_{S_2} = x_{S_2}, \quad H_{S_2} \sin g_{S_2} = y_{S_2} \end{cases} \quad (18)$$

则式(16)可化为线性方程组

$$\begin{cases} a_M x_{M_2} - b_M y_{M_2} + a_S x_{S_2} - b_S y_{S_2} = A_2 \\ b_M x_{M_2} + a_M y_{M_2} + b_S x_{S_2} + a_S y_{S_2} = B_2 \end{cases} \quad (19)$$

显然, 如果进行了两次周日观测, 便可建立四个方程, 从而就可算出诸 x , y 值, 随之, 即可由式(18)算出调和常数。但是在实践中为了提高准确度, 常常必须进行两次以上的周日观测, 即一般来说 $N \geq 2$, 因而得到的是包含四个未知数的总共有 $2N$ 个方程的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{Mi} x_{M_2} - b_{Mi} y_{M_2} + a_{Si} x_{S_2} - b_{Si} y_{S_2} = A_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ b_{Mi} x_{M_2} + a_{Mi} y_{M_2} + b_{Si} x_{S_2} + a_{Si} y_{S_2} = B_{2i} \end{cases} \quad (20)$$

式中脚标 i 表示第 i 次周日观测的相应量值。

一般来说, 式(20)是矛盾的线性方程组, 可以用最小二乘法处理, 其法方程为

$$\begin{cases} \alpha_2 x_{M_2} + \gamma_2 x_{S_2} + \delta_2 y_{S_2} = \kappa_2 \\ \alpha_2 y_{M_2} - \delta_2 x_{S_2} + \gamma_2 y_{S_2} = \lambda_2 \\ \gamma_2 x_{M_2} - \delta_2 y_{M_2} + \beta_2 x_{S_2} = \mu_2 \\ \delta_2 x_{M_2} + \gamma_2 y_{M_2} + \beta_2 y_{S_2} = \nu_2 \end{cases} \quad (21)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \Sigma(a_{Mi}^2 + b_{Mi}^2) = \Sigma \bar{D}_{M_2i}^2 \\ \beta_2 = \Sigma(a_{Si}^2 + b_{Si}^2) = \Sigma \bar{D}_{S_2i}^2 \\ \gamma_2 = \Sigma(a_{Mi}a_{Si} + b_{Mi}b_{Si}) = \Sigma \bar{D}_{M_2i} \bar{D}_{S_2i} \cos(\bar{d}_{M_2i} - \bar{d}_{S_2i}) \\ \delta_2 = \Sigma(-a_{Mi}b_{Si} + b_{Mi}a_{Si}) = \Sigma \bar{D}_{M_2i} \bar{D}_{S_2i} \sin(\bar{d}_{M_2i} - \bar{d}_{S_2i}) \\ \kappa_2 = \Sigma(A_{2i}a_{Mi} + B_{2i}b_{Mi}) = \Sigma F_{2i} \bar{D}_{M_2i} \cos(f_{2i} - \bar{d}_{M_2i}) \\ \lambda_2 = \Sigma(-A_{2i}b_{Mi} + B_{2i}a_{Mi}) = \Sigma F_{2i} \bar{D}_{M_2i} \sin(f_{2i} - \bar{d}_{M_2i}) \\ \mu_2 = \Sigma(A_{2i}a_{Si} + B_{2i}b_{Si}) = \Sigma F_{2i} \bar{D}_{S_2i} \cos(f_{2i} - \bar{d}_{S_2i}) \\ \nu_2 = \Sigma(-A_{2i}b_{Si} + B_{2i}a_{Si}) = \Sigma F_{2i} \bar{D}_{S_2i} \sin(f_{2i} - \bar{d}_{S_2i}) \end{array} \right. \quad (22)$$

这里 Σ 代表 $\sum_{i=1}^N$ 。最后我们得到方程组(21)的解为

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{M_2} = \eta_2 \kappa_2 - \theta_2 \mu_2 - \iota_2 \nu_2 \\ y_{M_2} = \eta_2 \lambda_2 + \iota_2 \mu_2 - \theta_2 \nu_2 \\ x_{S_2} = -\theta_2 \kappa_2 + \iota_2 \lambda_2 + \zeta_2 \mu_2 \\ y_{S_2} = -\iota_2 \kappa_2 - \theta_2 \lambda_2 + \zeta_2 \nu_2 \end{array} \right. \quad (23)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} (\zeta_2, \eta_2, \theta_2, \iota_2) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) / \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 = \alpha_2 \beta_2 - \gamma_2^2 - \delta_2^2 \end{array} \right. \quad (24)$$

综合起来,方法1的具体计算过程如下:

(i) 对每一周日实测潮高序列 Z , 分别计算 ZW , 得各天的 U_0^* , U_q^* , V_q^* , 然后由式(8),(12),(13)算出 X_0^* , F_q^* , f_q^* ;

(ii) 以 F_q^* , f_q^* 代替 F_q , f_q , 按照式(22),(24),(23),(18)计算调和常数的近似值;

(iii) 将调和常数近似值代入式(11), 分别算出各周日的 X_0 , X_q , Y_q , 从而由式(12), (13)算出 F_q , f_q ;

(iv) 用新的 F_q , f_q 重复第(ii)步过程, 算得新的调和常数。由于准调和分潮方法

表 I 潮高观测记录

地点: 奥吉迪贝, 5°34'N, 5°11'E。时区: -0100

i	时 间	潮 高 (厘 米)
1	1951年2月7日19时—8日6时 8日7时—8日18时	329 299 268 238 219 204 207 229 253 277 302 317
		320 302 271 229 192 174 171 192 216 256 296 314
2	1951年2月8日19时—9日6时 9日7时—9日18时	323 305 280 253 225 207 201 213 235 259 283 296
		305 299 280 250 207 189 177 186 207 232 268 299
3	1951年2月13日0时—13日11时 13日12时—13日23时	265 247 229 219 219 229 238 253 262 271 277 268
		262 253 238 222 225 238 247 259 268 280 289 280
4	1951年2月18日2时—18日13时 18日14时—19日1时	274 283 280 268 253 232 213 204 204 213 222 238
		259 280 286 283 268 253 241 235 232 238 250 268
⋮		

本身包含一定误差,这组调和常数可以看作是最后结果而不必进一步进行迭代。

下面表 I—V 是对位于非洲几内亚湾沿岸的测站奥吉迪贝 (Ogidigbe) 的计算实例。表 I 中所列的实测潮高是由文献[2]的实例中随意地摘录下来的,仅仅把单位由原文中的英尺化为厘米。作为例子,仅摘录 4 天(即 $N=4$),实际上这个方法可适用于任意不少于 2 天的潮高记录。实际计算时,表 II, IV 应各算 N 张,这里都只列出第一天的计算过程作为例子。表 III_a 中各天中间时刻的振幅系数 $\bar{D}$ 值和迟角订正 $\bar{a}$ 值系由文献[1]的表 2 中查得,该表中各准调和分潮的潮龄均取为 48 小时,较适用于中国近海的情况,对几内亚湾一带,潮龄最好取 24 小时左右。

表 II X_0^* 及 F_q^* , f_q^* 值

地点: 奥吉迪贝

第 1 次观测。中间时刻: 1951 年 2 月 8 日 6 时 30 分。 $\bar{t}=6$ 时 30 分。

	潮						高					
前 12 小时	329	299	268	238	219	204	207	229	253	277	302	317
后 12 小时	320	302	271	229	192	174	171	192	216	256	296	314

	乘 数												除 数
X_0^*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	24.00
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
X_1^*	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	15.35
	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
Y_1^*	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	15.28
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
X_2^*	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	15.03
	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	
Y_2^*	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	15.85
	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
X_3^*	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	13.16
	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	
Y_3^*	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	16.00
	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	

$$X_0^* = 253.1; X_1^* = 4.6, Y_1^* = -13.7; X_2^* = 68.3, Y_2^* = 0.9; X_3^* = 3.0, Y_3^* = 1.8.$$

$$\varphi_1^* = 289, F_1^* = 14; \varphi_2^* = 1, F_2^* = 68; \varphi_3^* = 31, F_3^* = 3.$$

$$f_1^* = 27, f_2^* = 196, f_3^* = 61,$$

注: $\varphi_q^* = \tau_q^{-1} Y_q^* / X_q^*$, $F_q^* = (X_q^{*2} + Y_q^{*2})^{1/2}$, $f_q^* = \varphi_q^* + q15^\circ \bar{t}$.

表 III. $\zeta, \eta, \theta, \iota$ 值

地点: 奥吉迪贝

i	观测中间时刻	$\bar{d}_{O_1}$	$\bar{D}_{O_1}$	$\bar{d}_{K_1}$	$\bar{D}_{K_1}$	$\bar{d}_{M_2}$	$\bar{D}_{M_2}$	$\bar{d}_{S_2}$	$\bar{D}_{S_2}$	$\bar{d}_{M_4}$	$\bar{D}_{M_4}$	$\bar{d}_{MS_4}$	$\bar{D}_{MS_4}$
1	1951年2月8日 6.5时	98	1.34	331	1.27	49	1.09	22	1.15	98	1.19	75	1.46
2	9 6.5	125	1.30	329	1.25	75	1.06	21	1.16	151	1.12	97	1.45
3	13 11.5	233	1.10	324	1.05	178	0.90	19	1.18	356	0.80	184	1.01
4	18 13.5	349	1.03	322	0.88	290	0.84	16	1.22	220	0.70	317	0.85
∴													

i	$\bar{D}_{O_1}$	$\bar{D}_{K_1}^2$	$\bar{d}_{O_1}-\bar{d}_{K_1}$	$\bar{D}_{O_1}\bar{D}_{K_1}$	cos	sin ¹⁾	$\bar{D}_{M_2}^2$	$\bar{D}_{S_2}^2$	$\bar{d}_{M_2}-\bar{d}_{S_2}$	$\bar{D}_{M_2}\bar{D}_{S_2}$	cos	sin ¹⁾	$\bar{D}_{M_4}^2$	$\bar{D}_{MS_4}^2$	$\bar{d}_{M_4}-\bar{d}_{MS_4}$	$\bar{D}_{M_4}\bar{D}_{MS_4}$	cos	sin ¹⁾
1	1.80	1.61	127	1.70	-1.02	1.36	1.19	1.32	27	1.25	1.11	0.57	1.42	2.13	23	1.74	1.60	0.68
2	1.69	1.56	156	1.63	-1.49	0.66	1.12	1.35	54	1.23	0.72	1.00	1.25	2.10	54	1.62	0.95	1.31
3	1.21	1.10	269	1.16	-0.02	-1.16	0.81	1.39	159	1.06	-0.99	0.38	0.64	1.02	172	0.81	-0.80	0.11
4	1.06	0.77	27	0.91	0.81	0.41	0.71	1.49	274	1.02	0.07	-1.02	0.49	0.72	263	0.60	-0.07	-0.60
∴																		
Σ	5.76	5.04			-1.72	1.27	3.83	5.55			0.91	0.93	3.80	5.97			1.68	1.50
	(α_1)	(β_1)			(γ_1)	(δ_1)	(α_2)	(β_2)			(γ_2)	(δ_2)	(α_4)	(β_4)			(γ_4)	(δ_4)

$$\varepsilon_1 = \alpha_1\beta_1 - \gamma_1^2 - \delta_1^2 = 24.46$$

$$\varepsilon_2 = \alpha_2\beta_2 - \gamma_2^2 - \delta_2^2 = 19.57$$

$$\varepsilon_4 = \alpha_4\beta_4 - \gamma_4^2 - \delta_4^2 = 17.62$$

ζ_1	η_1	θ_1	$\iota_1^{2)}$	ζ_2	η_2	θ_2	$\iota_2^{2)}$	ζ_4	η_4	θ_4	$\iota_4^{2)}$
0.235	0.206	-0.070	0.052	0.196	0.284	0.046	0.048	0.216	0.339	0.095	0.085

注: 1) $\cos, \sin$ 代表 $\bar{D}_{O_1}\bar{D}_{K_1}\cos(\bar{d}_{O_1}-\bar{d}_{K_1}), \bar{D}_{O_1}\bar{D}_{K_1}\sin(\bar{d}_{O_1}-\bar{d}_{K_1}); \dots$ 2) $(\zeta_4, \eta_4, \theta_4, \iota_4) = (\alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \delta_4)/\varepsilon_4$

表 III_b 调和常数近似值

地点：奥吉迪贝

i	f_1^*	F_1^*	f_2^*	F_2^*	f_4^*	F_4^*
1	27	14	196	68	61	3
2	25	12	211	61	32	3
3	279	6	295	29	53	2
4	325	16	110	32	14	2
⋮						

i	$f_1^* - \bar{d}_{O_1}$	$F_1^* \bar{D}_{O_1}$	cos sin ¹⁾	$f_2^* - \bar{d}_{M_2}$	$F_2^* \bar{D}_{M_2}$	cos sin ¹⁾	$f_4^* - \bar{d}_{M_4}$	$F_4^* \bar{D}_{M_4}$	cos sin ¹⁾
1	289	19	6 -18	147	74	-62 40	323	4	3 -2
2	260	16	-3 -16	136	65	-47 45	241	3	-1 -3
3	46	7	5 5	117	26	-12 23	57	2	1 2
4	336	16	15 -7	180	27	-27 0	154	1	-1 0
⋮									

$$\Sigma \frac{23 - 36}{(\kappa_1^*)(\lambda_1^*)}$$

$$\frac{-148 \ 108}{(\kappa_2^*)(\lambda_2^*)}$$

$$\frac{2 - 3}{(\kappa_4^*)(\lambda_4^*)}$$

i	$f_1^* - \bar{d}_{K_1}$	$F_1^* \bar{D}_{K_1}$	cos sin ¹⁾	$f_2^* - \bar{d}_{S_2}$	$F_2^* \bar{D}_{S_2}$	cos sin ¹⁾	$f_4^* - \bar{d}_{MS_4}$	$F_4^* \bar{D}_{MS_4}$	cos sin ¹⁾
1	56	18	10 15	174	78	-78 8	346	4	4 -1
2	56	15	8 12	190	71	-70 -12	295	4	2 -4
3	315	6	4 -4	276	34	4 -34	229	2	-1 -2
4	3	14	14 1	94	39	-3 39	57	2	1 2
⋮									

$$\Sigma \frac{36 \ 24}{(\mu_1^*)(\nu_1^*)}$$

$$\frac{-147 \ 1}{(\mu_2^*)(\nu_2^*)}$$

$$\frac{6 - 5}{(\mu_4^*)(\nu_4^*)}$$

$$\begin{aligned} x_{O_1}^* &= \eta_1 \kappa_1^* - \theta_1 \mu_1^* - \iota_1 \nu_1^* = 6.0, & x_{M_2}^* &= \eta_2 \kappa_2^* - \theta_2 \mu_2^* - \iota_2 \nu_2^* = -35.2, & x_{M_4}^* &= \eta_4 \kappa_4^* - \theta_4 \mu_4^* - \iota_4 \nu_4^* = 0.5, \\ y_{O_1}^* &= \eta_1 \lambda_1^* + \iota_1 \mu_1^* - \theta_1 \nu_1^* = -3.8, & y_{M_2}^* &= \eta_2 \lambda_2^* + \iota_2 \mu_2^* - \theta_2 \nu_2^* = 23.6, & y_{M_4}^* &= \eta_4 \lambda_4^* + \iota_4 \mu_4^* - \theta_4 \nu_4^* = 0.0, \\ x_{K_1}^* &= -\theta_1 \kappa_1^* + \iota_1 \lambda_1^* + \zeta_1 \mu_1^* = 8.2, & x_{S_2}^* &= -\theta_2 \kappa_2^* + \iota_2 \lambda_2^* + \zeta_2 \mu_2^* = -16.8, & x_{MS_4}^* &= -\theta_4 \kappa_4^* + \iota_4 \lambda_4^* + \zeta_4 \mu_4^* = 0.8, \\ y_{K_1}^* &= -\iota_1 \kappa_1^* - \theta_1 \lambda_1^* + \zeta_1 \nu_1^* = 1.9, & y_{S_2}^* &= -\iota_2 \kappa_2^* - \theta_2 \lambda_2^* + \zeta_2 \nu_2^* = 2.3, & y_{MS_4}^* &= -\iota_4 \kappa_4^* - \theta_4 \lambda_4^* + \zeta_4 \nu_4^* = 1.0. \\ g_{O_1}^* &= 328, H_{O_1}^* = 7; & g_{M_2}^* &= 146, H_{M_2}^* = 42; & g_{M_4}^* &= 0, H_{M_4}^{*(2)} = 1; \\ g_{K_1}^* &= 13, H_{K_1}^* = 8; & g_{S_2}^* &= 172, H_{S_2}^* = 17; & g_{MS_4}^* &= 309, H_{MS_4}^{*(2)} = 1. \end{aligned}$$

注：1) cos, sin 代表 $F_1^* \bar{D}_{O_1} \cos(f_1^* - \bar{d}_{O_1})$, $F_1^* \bar{D}_{O_1} \sin(f_1^* - \bar{d}_{O_1})$; ...2) $g_C^* = \tau_C^{-1} y_C^* / x_C^*$, $H_C^* = (x_C^{*2} + y_C^{*2})^{1/2}$.表 IV X_0 及 F_q, f_q 值

地点：奥吉迪贝

第 1 次观测。中间时刻：1951 年 2 月 8 日 6 时 30 分。 $\bar{t} = 6$ 时 30 分

分潮	p	g^*	H^*	$\bar{d}$	$\bar{D}$	$\bar{d} + g^* - p15\bar{t}$	$\bar{D}H^*$
O_1	1	328	7	98	1.34	328	9
K_1	1	13	8	331	1.27	246	10
M_2	2	146	42	49	1.09	0	46
S_2	2	172	17	22	1.15	359	20
M_4	4	0	1	98	1.19	68	1
MS_4	4	309	1	75	1.46	354	1

分 潮	<i>a</i>	<i>b</i> ¹⁾	乘 数 <i>J</i>							
			<i>X</i> ₀	<i>X</i> ₁	<i>Y</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>Y</i> ₂	<i>X</i> ₄	<i>Y</i> ₄	
<i>O</i> ₁	8	—5	—0.075	0.051	—0.065	0.041	0.102	0.008	0.043	
<i>K</i> ₁	—4	—9	0.003	0.000	0.000	—0.002	—0.004	0.000	—0.002	
<i>M</i> ₂	46	0	0.035	—0.110	—0.006	0.000	0.000	—0.021	—0.050	
<i>S</i> ₂	20	0	0.000	0.000	0.000	—0.028	0.025	0.000	0.000	
<i>M</i> ₄	0	1	0.035	0.001	—0.012	0.114	0.006	0.000	0.000	
<i>MS</i> ₄	1	0	0.018	0.000	—0.003	0.057	0.002	—0.033	—0.008	

$\Delta X_0 = 1.0$; $\Delta X_1 = -4.7$, $\Delta Y_1 = 0.3$; $\Delta X_2 = -0.2$, $\Delta Y_2 = -0.5$; $\Delta X_4 = -0.9$, $\Delta Y_4^{(2)} = -0.2$ 。

$X_0^* = 253.1$; $X_1^* = 4.6$, $Y_1^* = -13.7$; $X_2^* = 68.3$, $Y_2^* = 0.9$; $X_4^* = 3.0$, $Y_4^* = 1.8$ 。

$X_0 = 254.1$; $X_1 = -0.1$, $Y_1 = -13.4$; $X_2 = 68.1$, $Y_2 = 0.4$; $X_4 = 2.1$, $Y_4 = 1.6$ 。

$\varphi_1 = 270$, $F_1 = 13$; $\varphi_2 = 0$, $F_2 = 68$; $\varphi_4 = 37$, $F_4^{(3)} = 3$ 。

$f_1 = 8$, $f_2 = 195$, $f_4^{(3)} = 67$ 。

注: 1) $a = \bar{D}H^* \cos(\bar{d} + g^* - p15^\circ \bar{t})$, $b = \bar{D}H^* \sin(\bar{d} + g^* - p15^\circ \bar{t})$ 。

2) $\Delta X_q = \sum_C J^{X_q, C} a_C$, $\Delta Y_q = \sum_C J^{Y_q, C} b_C$ 。

3) $\varphi_q = \bar{t}_q^{-1} Y_q / X_q$, $F_q = (X_q^2 + Y_q^2)^{1/2}$; $f_q = \varphi_q + q15^\circ \bar{t}$ 。

表V 调和常数

地点: 奥吉迪贝 时区: -0100

i	f ₁	F ₁	f ₂	F ₂	f ₄	F ₄
1	8	13	195	68	67	3
2	7	12	211	61	10	3
3	307	7	298	29	65	3
4	335	18	110	33	355	2
⋮						

i	f ₁ - $\bar{d}_{O_1}$	F ₁ $\bar{D}_{O_1}$	cos	sin ¹⁾	f ₂ - $\bar{d}_{M_2}$	F ₂ $\bar{D}_{M_2}$	cos	sin ¹⁾	f ₄ - $\bar{d}_{M_4}$	F ₄ $\bar{D}_{M_4}$	cos	sin ¹⁾
1	270	17	0	-17	146	74	-61	41	329	4	3	-2
2	242	16	-8	-14	136	65	-47	45	219	3	-2	-2
3	74	8	2	8	120	26	-13	23	69	2	1	2
4	346	19	18	-5	180	28	-28	0	135	1	-1	1
⋮												

$$\Sigma \frac{12-28}{(\kappa_1)(\lambda_1)}$$

$$\frac{-149 \ 109}{(\kappa_2)(\lambda_2)}$$

$$\frac{1-1}{(\kappa_4)(\lambda_4)}$$

i	f ₁ - $\bar{d}_{K_1}$	F ₁ $\bar{D}_{K_1}$	cos	sin ¹⁾	f ₂ - $\bar{d}_{S_2}$	F ₂ $\bar{D}_{S_2}$	cos	sin ¹⁾	f ₄ - $\bar{d}_{MS_4}$	F ₄ $\bar{D}_{MS_4}$	cos	sin ¹⁾
1	37	17	14	10	173	78	-77	10	352	4	4	-1
2	38	15	12	9	190	71	-70	-12	273	4	0	-4
3	343	7	7	-2	279	34	5	-34	241	3	-1	-3
4	13	16	16	4	94	40	-3	40	38	2	2	1
⋮												

$$\Sigma \frac{49 \ 21}{(\mu_1)(\nu_1)}$$

$$\frac{-145 \ 4}{(\mu_2)(\nu_2)}$$

$$\frac{5-7}{(\mu_4)(\nu_4)}$$

$x_{O_1} = \eta_1 \kappa_1 - \theta_1 \mu_1 - \iota_1 \nu_1 = 4.8$, $x_{M_2} = \eta_2 \kappa_2 - \theta_2 \mu_2 - \iota_2 \nu_2 = -35.8$, $x_{M_4} = \eta_4 \kappa_4 - \theta_4 \mu_4 - \iota_4 \nu_4 = 0.4$ 。

$y_{O_1} = \eta_1 \lambda_1 + \iota_1 \mu_1 - \theta_1 \nu_1 = -1.8$, $y_{M_2} = \eta_2 \lambda_2 + \iota_2 \mu_2 - \theta_2 \nu_2 = 23.8$, $y_{M_4} = \eta_4 \lambda_4 + \iota_4 \mu_4 - \theta_4 \nu_4 = 0.8$ 。

$x_{K_1} = -\theta_1 \kappa_1 + \iota_1 \lambda_1 + \xi_1 \mu_1 = 10.8$, $x_{S_2} = -\theta_2 \kappa_2 + \iota_2 \lambda_2 + \xi_2 \mu_2 = -16.3$, $x_{MS_4} = -\theta_4 \kappa_4 + \iota_4 \lambda_4 + \xi_4 \mu_4 = 0.9$ 。

$y_{K_1} = -\iota_1 \kappa_1 - \theta_1 \lambda_1 + \xi_1 \nu_1 = 2.3$, $y_{S_2} = -\iota_2 \kappa_2 - \theta_2 \lambda_2 + \xi_2 \nu_2 = 3.0$, $y_{MS_4} = -\iota_4 \kappa_4 - \theta_4 \lambda_4 + \xi_4 \nu_4 = -1.5$ 。

$g_{O_1} = 339$, $H_{O_1} = 5$; $g_{M_2} = 146$, $H_{M_2} = 43$; $g_{M_4} = 63$, $H_{M_4}^{(2)} = 1$;

$g_{K_1} = 12$, $H_{K_1} = 11$; $g_{S_2} = 170$, $H_{S_2} = 17$; $g_{MS_4} = 301$, $H_{MS_4}^{(2)} = 2$ 。

注: 1) cos, sin 代表 $F_1 \bar{D}_{O_1} \cos(f_1 - \bar{d}_{O_1})$, $F_1 \bar{D}_{O_1} \sin(f_1 - \bar{d}_{O_1})$; ...。

2) $g_C = \bar{t}_C^{-1} y_C / x_C$, $H_C = (x_C^2 + y_C^2)^{1/2}$ 。

二、方 法 2

在采用方法 1 时, 观测天数 N 必须不小于 2。对于一天观测, 即当 $N = 1$ 时, 方程组 (20) 仅包含两个方程, 无法将两个分潮分离开来。这时必须假设两个分潮的调和常数之间存在着预先知道的关系。通常的作法是取同族两个分潮之间的迟角差和振幅比为已知量, 这两个量我们称之为两个分潮调和常数的差比数。因为同族分潮之间的差比数随地点的变化一般不大, 如果附近有已知调和常数的港口, 就可以认为所求地点的差比数等于附近港口的相应值。更细致一些, 也可根据附近几个港口的差比数来内插得出。拿半日分潮为例, 假设观测地点的差比数

$$\begin{cases} g'_2 = g_{s_2} - g_{M_2} \\ H'_2 = H_{s_2}/H_{M_2} \end{cases} \quad (25)$$

为已知, 则由它与式 (20) 构成了由四个方程组成的方程组, 从而可解算出调和常数。虽然对于 $N \geq 2$ 的情形已有方法 1 可以采用, 但是我们这里的讨论将不只限于一次观测, 而是针对 $N \geq 1$ 的普遍情形。这样, 当 $N = 1$ 时, 将不能采用方法 1; 当 $N \geq 2$ 时, 可采用方法 1, 也可采用方法 2。由于方法 1 不需要预先知道调和常数的差比数, 故可称为不引入差比数的方法, 方法 2 则可称为引入差比数的方法¹⁾。在第三节中我们将比较这两种方法的优缺点。

方法 2 的前半部分与方法 1 相同, 即用与方法 1 相同的手续计算 A_q, B_q 或 F_q, f_q 值。算出这些量以后, 对于每一次周日观测可得到两个方程的方程组 (16), 在 g'_2 和 H'_2 已知的情况下, 方程组中的四个未知量就变成了两个, 化为:

$$\begin{cases} \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \cos(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2}) + \bar{D}_{s_2} H'_2 H_{M_2} \cos(\bar{d}_{s_2} + g'_2 + g_{M_2}) = A_2 \\ \bar{D}_{M_2} H_{M_2} \sin(\bar{d}_{M_2} + g_{M_2}) + \bar{D}_{s_2} H'_2 H_{M_2} \sin(\bar{d}_{s_2} + g'_2 + g_{M_2}) = B_2 \end{cases} \quad (26)$$

若令

$$\begin{cases} a_2 = \bar{D}_2 \cos \bar{d}_2 = \bar{D}_{M_2} \cos \bar{d}_{M_2} + \bar{D}_{s_2} H'_2 \cos(\bar{d}_{s_2} + g'_2) \\ b_2 = \bar{D}_2 \sin \bar{d}_2 = \bar{D}_{M_2} \sin \bar{d}_{M_2} + \bar{D}_{s_2} H'_2 \sin(\bar{d}_{s_2} + g'_2) \end{cases} \quad (27)$$

则有

$$\begin{cases} a_2 x_{M_2} - b_2 y_{M_2} = A_2 \\ b_2 x_{M_2} + a_2 y_{M_2} = B_2 \end{cases} \quad (28)$$

对于 $N(N \geq 1)$ 次周日观测, 可得方程组

$$\begin{cases} a_{2i} x_{M_2} - b_{2i} y_{M_2} = A_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ b_{2i} x_{M_2} + a_{2i} y_{M_2} = B_{2i} \end{cases} \quad (29)$$

用最小二乘法容易求得方程组 (29) 的解为

$$\begin{cases} x_{M_2} = \frac{\Sigma(A_{2i} a_{2i} + B_{2i} b_{2i})}{\Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2)} = \frac{\Sigma F_{2i} \bar{D}_{2i} \cos(f_{2i} - \bar{d}_{2i})}{\Sigma \bar{D}_{2i}^2} \\ y_{M_2} = \frac{\Sigma(-A_{2i} b_{2i} + B_{2i} a_{2i})}{\Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2)} = \frac{\Sigma F_{2i} \bar{D}_{2i} \sin(f_{2i} - \bar{d}_{2i})}{\Sigma \bar{D}_{2i}^2} \end{cases} \quad (30)$$

1) 实际上, 准调和分潮方法本身已在属于同一准调和分潮的各个调和分潮之间引入了固定的差比数。这里所谓引入或不引入差比数系指同族两个准调和分潮之间的差比数而言。

综合起来,方法2的具体计算过程如下:

- (i) 同方法1;
- (ii) 以 F_q^* , f_q^* 代替 F_q , f_q , 按照式(30),(18),(25)计算调和常数的近似值;
- (iii) 同方法1;
- (iv) 用新的 F_q , f_q 重复第(ii)步过程即得最后结果——调和常数。

表 III_a, III_b 和表 V' 是方法2的实例,所用的观测数据同方法1的实例。实际计算时,计算过程按表 I, II, III_a, III_b, IV, V' 次序进行。由于表 II, IV 的算法与方法1相同(但表 IV 的具体数字有不小的差异,因为用两种方法算得的调和常数近似值有所不同),为节省篇幅,这里未列出。表 III_a 中所用的差比数根据塔科腊迪 (Takoradi, 4°53'N, 1°45'W) 的调和常数: $g_{O_1} = 332^{\circ}2'$, $H_{O_1} = 2.3$ 厘米; $g_{K_1} = 6.0$, $H_{K_1} = 11.9$; $g_{M_2} = 135.9$, $H_{M_2} = 44.9$; $g_{S_2} = 163.5$, $H_{S_2} = 15.9$ (见文献[5],这里的 g 已化为以 -0100 时区为淮的数值)。并且取 $g'_4 = g'_2$, $H'_4 = 2H'_{20}$ 。

三、关于分析结果的可靠性

1. 方法1的误差问题

式(22)、(23)、(24)确立了 x_{M_2} , y_{M_2} , x_{S_2} , y_{S_2} 与 A_{2i} , B_{2i} ($i = 1, 2, \dots, N$) 之间的函数关系,并且容易看出是线性的关系,因为这些式子可以改写成:

$$\begin{cases} x_{M_2} = \frac{1}{\varepsilon_2} \Sigma [(\beta_2 a_{Mi} - \gamma_2 a_{Si} + \delta_2 b_{Si}) A_{2i} + (\beta_2 b_{Mi} - \delta_2 a_{Si} - \gamma_2 b_{Si}) B_{2i}] \\ y_{M_2} = \frac{1}{\varepsilon_2} \Sigma [(-\beta_2 b_{Mi} + \delta_2 a_{Si} + \gamma_2 b_{Si}) A_{2i} + (\beta_2 a_{Mi} - \gamma_2 a_{Si} + \delta_2 b_{Si}) B_{2i}] \\ x_{S_2} = \frac{1}{\varepsilon_2} \Sigma [(-\gamma_2 a_{Mi} - \delta_2 b_{Mi} + \alpha_2 a_{Si}) A_{2i} + (\delta_2 a_{Mi} - \gamma_2 b_{Mi} + \alpha_2 b_{Si}) B_{2i}] \\ y_{S_2} = \frac{1}{\varepsilon_2} \Sigma [(-\delta_2 a_{Mi} + \gamma_2 b_{Mi} - \alpha_2 b_{Si}) A_{2i} + (-\gamma_2 a_{Mi} - \delta_2 b_{Mi} + \alpha_2 a_{Si}) B_{2i}] \end{cases} \quad (31)$$

由于非潮汐(主要是气象)因素对水位的影响,观测的误差以及表达式本身所存在的误差,实测水位不能精确地由式(2)或(3)代表。亦即实测水位除了能由这些表达式代表的部分外,还存在着所谓“余差”,因而算得的 A_i , B_i 也就受到余差的影响,这个影响我们称为 A_i , B_i 的“误差”,或笼统地叫观测误差。

我们假定 A_{2i} , B_{2i} 的误差都是互不相关的,因为每一次周日观测都是随意选择的;并且假定每个误差都具有相同的数学期望 0 和相同的方差 v_2 。在线性、不相关这两个前提下, x_{M_2} 的方差应等于

$$v_{x_{M_2}} = \left\{ \frac{1}{\varepsilon_2^2} \Sigma [(\beta_2 a_{Mi} - \gamma_2 a_{Si} + \delta_2 b_{Si})^2 + (\beta_2 b_{Mi} - \delta_2 a_{Si} - \gamma_2 b_{Si})^2] \right\} v_2 = \frac{\beta_2}{\varepsilon_2} v_2$$

同样可以求得 y_{M_2} , x_{S_2} 和 y_{S_2} 的方差,结果如下:

$$\begin{cases} v_{y_{M_2}} = v_{x_{M_2}} = \frac{\beta_2}{\varepsilon_2} v_2 \\ v_{y_{S_2}} = v_{x_{S_2}} = \frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} v_2 \end{cases} \quad (32)$$

表 III. $\bar{D}_a$, $\bar{d}_a$ 及 ρ_a 值地点：奥吉迪贝。差比数： $g'_1 = 34^\circ$, $H'_1 = 5.17$; $g'_2 = 28^\circ$, $H'_2 = 0.35$; $g'_4 = 28^\circ$, $H'_4 = 0.70$ (根据塔科腊迪)。

i	观测中间时刻	$\bar{d}_{O_1}$	$\bar{D}_{O_1}$	$\cos$	$\sin^{1)}$	$\bar{d}_{K_1}$	$\bar{D}_{K_1}$	$\bar{d}_{K_1} + g'_1 \bar{D}_{K_1} H'_1$	$\cos$	$\sin^{1)}$	$\bar{D}_1 \cos \bar{d}_1 \bar{D}_1 \sin \bar{d}_1^{2)}$	$\bar{d}_1$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_1^2$	
1	1951年2月8日 6.5时	98	1.34	-0.19	1.33	331	1.27	5	6.55	0.57	6.36	1.90	17	6.64	44.09
2	9 6.5	125	1.30	-0.75	1.06	329	1.25	3	6.45	0.34	5.70	1.40	14	5.87	34.46
3	13 11.5	233	1.10	-0.66	-0.88	324	1.05	358	5.43	-0.19	4.77	-1.07	347	4.89	23.91
4	18 13.5	349	1.03	1.01	-0.20	322	0.88	356	4.54	-0.32	5.55	-0.52	355	5.57	31.02
∴															

$$\rho_1 = \Sigma \bar{D}_1^2 = 133.48$$

i	$\bar{d}_{M_2}$	$\bar{D}_{M_2}$	$\cos$	$\sin^{1)}$	$\bar{d}_{S_2}$	$\bar{D}_{S_2}$	$\bar{d}_{S_2} + g'_2 \bar{D}_{S_2} H'_2$	$\cos$	$\sin^{1)}$	$\bar{D}_2 \cos \bar{d}_2 \bar{D}_2 \sin \bar{d}_2^{2)}$	$\bar{d}_2$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_2^2$	
1	49	1.09	0.72	0.82	22	1.15	50	0.26	0.31	0.98	1.13	49	1.50	2.25
2	75	1.06	0.27	1.02	21	1.16	49	0.27	0.31	0.54	1.33	68	1.44	2.07
3	178	0.90	-0.90	0.03	19	1.18	47	0.28	0.30	-0.62	0.33	152	0.70	0.49
4	290	0.84	0.29	-0.79	16	1.22	44	0.31	0.30	0.60	-0.49	321	0.77	0.59
∴														

$$\rho_2 = \Sigma \bar{D}_2^2 = 5.40$$

i	$\bar{d}_{M_4}$	$\bar{D}_{M_4}$	$\cos$	$\sin^{1)}$	$\bar{d}_{MS_4}$	$\bar{D}_{MS_4}$	$\bar{d}_{MS_4}+g'_4\bar{D}_{MS_4}H'_4$	$\cos$	$\sin^{1)}$	$\bar{D}_4\cos\bar{d}_4\bar{D}_4\sin\bar{d}_4^{2)}$	$\bar{d}_4$	$\bar{D}_4$	$\bar{D}_4^2$	
1	98	1.19	-0.17	1.18	75	1.46	103	1.02	0.99	-0.40	2.17	100	2.21	4.88
2	151	1.12	-0.98	0.54	97	1.45	125	1.02	0.84	-1.57	1.38	139	2.09	4.37
3	356	0.80	0.80	-0.06	184	1.01	212	0.71	-0.38	0.20	-0.44	294	0.48	0.23
4	220	0.70	-0.54	-0.45	317	0.85	345	0.60	-0.16	0.04	-0.61	274	0.61	0.37
$\vdots$														

$$\rho_4 = \Sigma \bar{D}_4^2 = 9.85$$

注：1) $\cos$, $\sin$ 代表 $\bar{D}_{O_1} \cos \bar{d}_{O_1}$, $\bar{D}_{O_1} \sin \bar{d}_{O_1}$; $\bar{D}_{K_1} \cos(\bar{d}_{K_1} + g'_1)$, $\bar{D}_{K_1} \sin(\bar{d}_{K_1} + g'_1)$; $\bar{D}_{S_2} \cos(\bar{d}_{S_2} + g'_2)$, $\bar{D}_{S_2} \sin(\bar{d}_{S_2} + g'_2)$; $\bar{D}_{MS_4} \cos(\bar{d}_{MS_4} + g'_4)$, $\bar{D}_{MS_4} \sin(\bar{d}_{MS_4} + g'_4)$; ...
 2) $\bar{D}_1 \cos \bar{d}_1 = \bar{D}_{O_1} \cos \bar{d}_{O_1} + \bar{D}_{K_1} \cos(\bar{d}_{K_1} + g'_1)$, $\bar{D}_1 \sin \bar{d}_1 = \bar{D}_{O_1} \sin \bar{d}_{O_1} + \bar{D}_{K_1} \sin(\bar{d}_{K_1} + g'_1)$; ...

表 III₆ 调和常数近似值

地点: 奥吉迪贝

i	f_i^*	F_i^*	$f_i^* - \bar{d}_1$	$F_i^* \bar{D}_1$	cos	sin ¹⁾
1	27	14	10	93	92	16
2	25	12	11	70	69	13
3	279	6	292	29	11	-27
4	325	16	330	89	77	-45
⋮						

$$\Sigma \begin{array}{cc} 249 & -43 \\ (x_{O_1}^*, y_{O_1}^*) = \Sigma/\rho_1 & 1.9 \quad -0.3 \end{array}$$

$$g_{O_1}^* = f_6^{-1} y_{O_1}^* / x_{O_1}^* = 351, H_{O_1}^* = (x_{O_1}^{*2} + y_{O_1}^{*2})^{1/2} = 1.9.$$

$$g_{K_1}^* = g_{O_1}^* + g_1' = 25, H_{K_1}^* = H_1' H_{O_1}^* = 9.8.$$

i	f_i^*	F_i^*	$f_i^* - \bar{d}_2$	$F_i^* \bar{D}_2$	cos	sin ¹⁾
1	196	68	147	102	-86	56
2	211	61	143	88	-70	53
3	295	29	143	20	-16	12
4	110	32	149	25	-21	13
⋮						

$$\Sigma \begin{array}{cc} -193 & 134 \\ (x_{M_2}^*, y_{M_2}^*) = \Sigma/\rho_2 & -35.7 \quad 24.8 \end{array}$$

$$g_{M_2}^* = f_6^{-1} y_{M_2}^* / x_{M_2}^* = 145, H_{M_2}^* = (x_{M_2}^{*2} + y_{M_2}^{*2})^{1/2} = 43.5.$$

$$g_{S_2}^* = g_{M_2}^* + g_2' = 173, H_{S_2}^* = H_2' H_{M_2}^* = 15.2$$

i	f_i^*	F_i^*	$f_i^* - \bar{d}_4$	$F_i^* \bar{D}_4$	cos	sin ¹⁾
1	61	3	321	7	5	-4
2	32	3	253	6	-2	-6
3	53	2	119	1	-1	1
4	14	2	100	1	0	1
⋮						

$$\Sigma \begin{array}{cc} 2 & -8 \\ (x_{M_4}^*, y_{M_4}^*) = \Sigma/\rho_4 & 0.2 \quad -0.8 \end{array}$$

$$g_{M_4}^* = f_6^{-1} y_{M_4}^* / x_{M_4}^* = 284, H_{M_4}^* = (x_{M_4}^{*2} + y_{M_4}^{*2})^{1/2} = 0.8.$$

$$g_{MS_4}^* = g_{M_4}^* + g_4' = 312, H_{MS_4}^* = H_4' H_{M_4}^* = 0.6.$$

注: 1) cos, sin 代表 $F_i^* \bar{D}_1 \cos(f_i^* - \bar{d}_1)$,
 $F_i^* \bar{D}_1 \sin(f_i^* - \bar{d}_1)$; ...

我们用

$$V_2 = v_{x_{M_2}} + v_{y_{M_2}} + v_{x_{S_2}} + v_{y_{S_2}} \quad (33)$$

作为总的半日族的调和常数误差的量度,则

$$V_2 = \frac{2(\alpha_2 + \beta_2)}{\varepsilon_2} v_2 \quad (34)$$

由此可知,调和常数的误差与观测误差具有正比的关系,其比例系数我们可称之为观测误差影响系数。显然这个系数仅与观测日期的天文变量 $\bar{d}_{M_2}$, $\bar{D}_{M_2}$, $\bar{d}_{S_2}$, $\bar{D}_{S_2}$ 有关,我们下面

表 V' 调和常数

地点: 奥吉迪贝。时区: -0100

i	f_i	F_i	$f_i - \bar{d}_1$	$F_i \bar{D}_1$	cos	sin ¹⁾
1	6	14	349	93	91	-18
2	4	12	350	70	69	-12
3	308	8	321	39	30	-25
4	335	18	340	100	94	-34
⋮						

$$\Sigma \begin{array}{cc} 284 & -89 \\ (x_{O_1}, y_{O_1}) = \Sigma/\rho_1 & 2.1 \quad -0.7 \end{array}$$

$$g_{O_1} = f_6^{-1} y_{O_1} / x_{O_1} = 342, H_{O_1} = (x_{O_1}^2 + y_{O_1}^2)^{1/2} = 2.2.$$

$$g_{K_1} = g_{O_1} + g_1' = 16, H_{K_1} = H_1' H_{O_1} = 11.4.$$

i	f_i	F_i	$f_i - \bar{d}_2$	$F_i \bar{D}_2$	cos	sin ¹⁾
1	196	68	147	102	-86	56
2	211	61	143	88	-70	53
3	296	29	144	20	-16	12
4	109	33	148	25	-21	13
⋮						

$$\Sigma \begin{array}{cc} -193 & 134 \\ (x_{M_2}, y_{M_2}) = \Sigma/\rho_2 & -35.7 \quad 24.8 \end{array}$$

$$g_{M_2} = f_6^{-1} y_{M_2} / x_{M_2} = 145, H_{M_2} = (x_{M_2}^2 + y_{M_2}^2)^{1/2} = 43.5.$$

$$g_{S_2} = g_{M_2} + g_2' = 173, H_{S_2} = H_2' H_{M_2} = 15.2$$

i	f_i	F_i	$f_i - \bar{d}_4$	$F_i \bar{D}_4$	cos	sin ¹⁾
1	74	3	334	7	6	-3
2	12	3	233	6	-4	-5
3	67	3	133	1	-1	1
4	355	3	81	2	0	2
⋮						

$$\Sigma \begin{array}{cc} 1 & -5 \\ (x_{M_4}, y_{M_4}) = \Sigma/\rho_4 & 0.1 \quad -0.5 \end{array}$$

$$g_{M_4} = f_6^{-1} y_{M_4} / x_{M_4} = 281, H_{M_4} = (x_{M_4}^2 + y_{M_4}^2)^{1/2} = 0.5.$$

$$g_{MS_4} = g_{M_4} + g_4' = 309, H_{MS_4} = H_4' H_{M_4} = 0.4$$

注: 1) cos, sin 代表 $F_i \bar{D}_1 \cos(f_i - \bar{d}_1)$,
 $F_i \bar{D}_1 \sin(f_i - \bar{d}_1)$; ...

更详细地分析一下这个关系。

由于 $\bar{D}_{M_2}$ 和 $\bar{D}_{S_2}$ 均接近于 1, 故在一定的观测天数 N 的情况下, α_2 和 β_2 的变化幅度不太大, 决定观测误差影响系数大小的主要是量 ε_2 。由式(24)和(22)知,

$$\varepsilon_2 = \Sigma \bar{D}_{M_2 i} \cdot \Sigma \bar{D}_{S_2 i}^2 - [\Sigma \bar{D}_{M_2 i} \bar{D}_{S_2 i} \cos(\bar{d}_{M_2 i} - \bar{d}_{S_2 i})]^2 - [\Sigma \bar{D}_{M_2 i} \bar{D}_{S_2 i} \sin(\bar{d}_{M_2 i} - \bar{d}_{S_2 i})]^2 \quad (35)$$

为了减小影响系数, 必须使 ε_2 尽可能地大, 在一定观测天数的条件下, 主要地应当使

$$\gamma_2^2 + \delta_2^2 = [\Sigma \bar{D}_{M_2 i} \bar{D}_{S_2 i} \cos(\bar{d}_{M_2 i} - \bar{d}_{S_2 i})]^2 + [\Sigma \bar{D}_{M_2 i} \bar{D}_{S_2 i} \sin(\bar{d}_{M_2 i} - \bar{d}_{S_2 i})]^2 \quad (36)$$

尽可能地小。如果构造一矢量, 把 $\bar{d}_{M_2} - \bar{d}_{S_2}$ 作为它的方向, $\bar{D}_{M_2} \bar{D}_{S_2}$ 作为它的长度, 则所有各观测日期的这种矢量的和的长度即等于 $(\gamma_2^2 + \delta_2^2)^{\frac{1}{2}}$ 。为求得较准确的调和常数, 应当使各天的矢量尽量互相对消, 以减小矢量和的长度。如果各次观测(或其中的大部分)的 $\bar{d}_{M_2} - \bar{d}_{S_2}$ 具有相近的角度, 则即使观测天数很多, 仍然不能用方法 1 算得准确的结果。因此, 当比值 $(\gamma_2^2 + \delta_2^2)/\alpha_2 \beta_2 \ll 1$, 我们称观测的天文条件(在方法 1 的意义下)是良好的; 若接近于 1, 则是不良的。在优越的天文条件下, 即当 $(\gamma_2^2 + \delta_2^2)/\alpha_2 \beta_2 \approx 0$ 的情况下, x_{M_2} , y_{M_2} 和 x_{S_2} , y_{S_2} 的方差为

$$\begin{cases} v_{x_{M_2}} = v_{y_{M_2}} = \frac{1}{\alpha_2} v_2 \\ v_{x_{S_2}} = v_{y_{S_2}} = \frac{1}{\beta_2} v_2 \end{cases}$$

近似取 $\bar{D}_{M_2 i} \approx \bar{D}_{S_2 i} \approx 1$, 则有

$$v_{x_{M_2}} = v_{y_{M_2}} = v_{x_{S_2}} = v_{y_{S_2}} = \frac{1}{N} v_2$$

如所周知, 如果对某个观测对象的某一物理量如长度、重量等等进行 N 次直接测量, 测量当中没有系统误差, 每次测量误差的方差是 v , 那末, N 次测量结果的平均值的误差的方差即是 v/N 。这说明, 如果由 N 次周日观测求调和常数, 若观测日期选择得好, 所求得的调和常数的准确度可以达到与对某个观测对象的某一物理量进行 N 次直接测量求平均值的情况等同。在一般的情况下, 则前者的准确度相对地要比后者差。

上面只是以半日分潮为例说明, 对于全日分潮情况完全类似。如果打算用 N 次周日观测同时计算六个分潮的调和常数, 那末, 不但要求 ε_2 尽可能大, 而且也要求全日族的 ε_1 也尽可能地大。故在实际选择观测日期时, 应当同时考虑半日族和全日族的天文条件。至于四分日族, 因 ε_4 和 ε_2 差不多同时增大和减小, 不必再加考虑。

由于调和常数的误差正比于观测误差, 为了对调和常数的误差有个估计, 首先必须对观测误差或它的方差 v_2 有所了解。这是容易作到的, 只要在计算出调和常数后, 将它们代入到式(20)的左边, 算出等号两边的差值, 设为 ΔA_{2i} , ΔB_{2i} ($i = 1, 2, \dots, N$), 由 Bessel 公式即得

$$v_2 = \frac{1}{2N-4} \Sigma (\Delta A_{2i}^2 + \Delta B_{2i}^2) \quad (37)$$

由这个式子求得的 v_2 当然是当 N 相当大的时候才比较可靠。

应当指出, 为了得到较准确的调和常数, 除了增加观测天数, 选择良好天文条件之外, 如果可能, 还应尽量减小观测误差, 如选择较正常的天气条件, 提高观测仪器的准确度等。

2. 方法 2 的误差问题

在研究由方法 2 所得调和常数的误差时,不但要考虑到观测记录中存在的随机误差(这种误差在前面用方差 v_2 代表),而且还要考虑差比数本身所存在的误差。令

$$\begin{cases} x'_2 = H'_2 \cos g'_2 \\ y'_2 = H'_2 \sin g'_2 \end{cases} \quad (38)$$

我们假定 x'_2 和 y'_2 的误差也是随机的,并且彼此不相关,同时还假定它们的方差相等,用 v'_2 来记它。显然差比数误差与观测误差是相互独立的。

将(38)代入式(27),得

$$\begin{cases} a_{2i} = a_{Mi} + x'_2 a_{Si} - y'_2 b_{Si} \\ b_{2i} = b_{Mi} + x'_2 b_{Si} + y'_2 a_{Si} \end{cases} \quad (39)$$

再将这个式子代入式(30),并由(22),可得

$$\begin{cases} x_{M_2} = \frac{\Sigma(a_{Mi}A_{2i} + b_{Mi}B_{2i}) + x'_2\Sigma(a_{Si}A_{2i} + b_{Si}B_{2i}) + y'_2\Sigma(-b_{Si}A_{2i} + a_{Si}B_{2i})}{\alpha_2 + 2\gamma_2x'_2 + 2\delta_2y'_2 + \beta_2(x'^2_2 + y'^2_2)} \\ y_{M_2} = \frac{\Sigma(-b_{Mi}A_{2i} + a_{Mi}B_{2i}) + x'_2\Sigma(-b_{Si}A_{2i} + a_{Si}B_{2i}) - y'_2\Sigma(a_{Si}A_{2i} + b_{Si}B_{2i})}{\alpha_2 + 2\gamma_2x'_2 + 2\delta_2y'_2 + \beta_2(x'^2_2 + y'^2_2)} \end{cases} \quad (40)$$

对于 S_2 分潮,调和常数的计算式是由式(25)确定的,可以改写作

$$\begin{cases} x_{S_2} = x'_2x_{M_2} - y'_2y_{M_2} \\ y_{S_2} = y'_2x_{M_2} + x'_2y_{M_2} \end{cases} \quad (41)$$

或由式(40),

$$\begin{cases} x_{S_2} = \frac{x'_2\Sigma(a_{Mi}A_{2i} + b_{Mi}B_{2i}) - y'_2\Sigma(-b_{Mi}A_{2i} + a_{Mi}B_{2i}) + (x'^2_2 + y'^2_2)\Sigma(a_{Si}A_{2i} + b_{Si}B_{2i})}{\alpha_2 + 2\gamma_2x'_2 + 2\delta_2y'_2 + \beta_2(x'^2_2 + y'^2_2)} \\ y_{S_2} = \frac{x'_2\Sigma(-b_{Mi}A_{2i} + a_{Mi}B_{2i}) + y'_2\Sigma(a_{Mi}A_{2i} + b_{Mi}B_{2i}) + (x'^2_2 + y'^2_2)\Sigma(-b_{Si}A_{2i} + a_{Si}B_{2i})}{\alpha_2 + 2\gamma_2x'_2 + 2\delta_2y'_2 + \beta_2(x'^2_2 + y'^2_2)} \end{cases} \quad (42)$$

式(40)和(42)表示着 x_{M_2} , y_{M_2} , x_{S_2} , y_{S_2} 与随机变量 A_{2i} , B_{2i} , x'_2 , y'_2 之间的函数关系,但是已经不是线性关系了。一般来说,后面这些随机变量的变动范围,也就是说这些量的误差,是不很大的,在这个变动范围之内,欲求函数可以看作是它们的线性函数。这时,函数的方差就比较容易算出。例如对 x_{M_2} , 它方差可由下式近似表示:

$$v_{x_{M_2}} = \left[\Sigma \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 \right] v_2 + \left[\left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial x'_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial y'_2} \right)^2 \right] v'_2 \quad (43)$$

$v_{y_{M_2}}$, $v_{x_{S_2}}$, $v_{y_{S_2}}$ 的算法同样。为了不使正文过多地用来叙述繁琐而枯燥的推导过程,我们把它放在附录里,这里只列出最后结果:

$$\begin{cases} v_{x_{M_2}} = v_{y_{M_2}} \approx \frac{1}{\rho_2} v_2 + \frac{(P_s^2 + Q_s^2)H_{M_2}^2}{\rho_2^2} v'_2 \\ v_{x_{S_2}} = v_{y_{S_2}} \approx \frac{H_2'^2}{\rho_2} v_2 + \frac{(P_M^2 + Q_M^2)H_{M_2}^2}{\rho_2^2} v'_2 \end{cases} \quad (44)$$

式中

$$\begin{cases} P_M = \Sigma(a_{2i}a_{Mi} + b_{2i}b_{Mi}) = \Sigma\bar{D}_{2i}\bar{D}_{M_{2i}}\cos(\bar{d}_{2i} - \bar{d}_{M_{2i}}) \\ Q_M = \Sigma(-a_{2i}b_{Mi} + b_{2i}a_{Mi}) = \Sigma\bar{D}_{2i}\bar{D}_{M_{2i}}\sin(\bar{d}_{2i} - \bar{d}_{M_{2i}}) \\ P_S = \Sigma(a_{2i}a_{Si} + b_{2i}b_{Si}) = \Sigma\bar{D}_{2i}\bar{D}_{S_{2i}}\cos(\bar{d}_{2i} - \bar{d}_{S_{2i}}) \\ Q_S = \Sigma(-a_{2i}b_{Si} + b_{2i}a_{Si}) = \Sigma\bar{D}_{2i}\bar{D}_{S_{2i}}\sin(\bar{d}_{2i} - \bar{d}_{S_{2i}}) \\ \rho_2 = \Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2) = \Sigma\bar{D}_{2i}^2 \end{cases} \quad (45)$$

由式(44)可以明显地看出,当 $H'_2 < 1$, 即当 $H_{S_2} < H_{M_2}$ 时,观测误差对 M_2 分潮调和常数的影响要比 S_2 分潮大。相反,差比数误差则对 M_2 的常数有较小的影响,这是因为当 M_2 分潮振幅大于 S_2 时,角度 $d_2 - d_{M_2}$ 总是取 $\pm 45^\circ$ 之内的数值,而 $d_2 - d_{S_2}$ 则可变化于 $0^\circ - 360^\circ$, 故一般来说有 $P_M^2 + Q_M^2 > P_S^2 + Q_S^2$ 成立。若 $H'_2 > 1$, 则情况就完全反过来了。

与方法 1 一样,作为总的半日族调和常数误差的量度,我们同样地引入式(33)定义着的 V_2 , 但此时

$$V_2 = \frac{2(1 + H_2'^2)}{\rho_2} v_2 + \frac{2(P_M^2 + Q_M^2 + P_S^2 + Q_S^2)H_{M_2}^2}{\rho_2^2} v_2' \quad (46)$$

等号右边第一项代表着由观测数据引起的误差,第二项代表着由不准确的差比数所引起的误差,故 v_2 和 v_2' 前面的系数将分别称为观测误差影响系数和差比数误差影响系数。

关于 v_2 的估算方法已在本节的第一大段里讨论过。 v_2' 的估算在某些时候(例如取差比数等于附近地点的数值)是比较困难的,往往只能凭经验作出大体的估计,但在某些情况下还是可以采用一定的方式来求得它。例如在一个海区内有许多观测点需要用方法 2 计算,而各观测点的差比数是作为经纬度的函数给出的,则可以对这个海区中已知的由长期观测算得的许多地点的调和常数求其差比数,然后与按前述函数关系得出的数值进行比较,便可求得方差。在已知 v_2 和 v_2' 的情况下,调和常数的可靠性不难由式(44)或(46)估算。

方法 2 的观测误差影响系数具有非常简单的形式,它与 $\rho_2 = \Sigma\bar{D}_{2i}^2$ 成反比。因此,若用方法 2 计算调和常数,应当选择在具有大的 $\bar{D}_2$ 值即大潮期间进行观测。

差比数误差影响系数具有较为复杂的形式,它与 ρ_2 的关系不会是简单地随 ρ_2 增大而减小,特别是即使 $\rho_2 \rightarrow \infty$, 它也不会趋于 0, 因为很明显,在差比数存在误差的情况下,两个分潮不可能都没有误差。我们来观察一下两个极端的情形,一个是所有观测都在大潮期间进行,另一个是所有观测都在小潮时进行,并且取 $\bar{D}_{M_{2i}} \approx \bar{D}_{S_{2i}} \approx 1$, 大潮时有 $\bar{d}_{M_{2i}} - \bar{d}_{S_{2i}} = g'_{20}$ 根据式(27),知此时 $\bar{D}_{2i} = \bar{D}_{M_{2i}} + \bar{D}_{S_{2i}}H'_2 \approx 1 + H'_2$; $\bar{d}_{2i} = \bar{d}_{M_{2i}} = \bar{d}_{S_{2i}} + g'_{20}$ 因此由式(45)和(46)即得

$$V_2 = \frac{2(1 + H_2'^2)}{N(1 + H_2')^2} v_2 + \frac{4}{(1 + H_2')^2} H_{M_2}^2 v_2'$$

小潮时有 $\bar{d}_{M_{2i}} - \bar{d}_{S_{2i}} = g'_{20} + 180^\circ$, 类似地可算得此时

$$V_2 = \frac{2(1 + H_2'^2)}{N(1 - H_2')^2} v_2 + \frac{4}{(1 - H_2')^2} H_{M_2}^2 v_2'$$

比较这两种情况下的 V_2 值,可知由大潮观测资料所得的调和常数要比小潮的好,特别当

H'_2 接近于 1 即同族两个分潮的振幅很相近时尤为明显。

因此用方法 2 计算时,应尽量选择大潮期间进行观测。当然,要想使 6 个分潮的误差都较小,就应尽量选择全日潮和半日潮都是大潮的期间观测(四分日潮不必考虑,它的大潮差不多与半日潮大潮同时发生)。在全日潮龄和半日潮龄相差不大的地点(大多数海区都属此情形),在天文春、秋两季,全日潮的大潮总是伴随着半日潮的小潮,反之亦然;而在天文冬、夏两季,则两者的振幅是近乎同时增减的。所以由一次周日观测算调和常数,对天文条件的要求是相当苛刻的。当观测天数较多时,不一定要每次观测都在全日潮和半日潮均为大潮的期间进行,但是应避免所有各次观测都在全日潮小潮或都在半日潮小潮期间进行。此外,由于 H'_1 常常较 H'_2 更接近于 1,对于全日潮天文条件的选择更需注重一些。

3. 方法 1 与方法 2 的比较

对于 $N \geq 2$ 的情形,前面给出的两种计算方法都可以使用。或许有人会认为,既然这时可以采用不引入差比数的方法,就不应当再用后面一种方法计算,他们以为引入了差比数就引入了新的误差,从而使结果的误差更大。其实情况并非完全如此。为了说明这一点,下面来讨论一个特殊的情形。

假设所进行的 N 次观测对于方法 1 来讲具有最好的天文条件,即

$$\gamma_2 = \delta_2 = 0. \quad (47)$$

为简单起见,并设 $\bar{D}_{M_2i} \approx \bar{D}_{S_2i} \approx 1$ 。那么用方法 1 算得的调和常数的总方差为

$$V_2 = \frac{4}{N} v_2 \quad (48)$$

为了求得在这种条件下用方法 2 所得调和常数的总方差,我们根据式(45), (39) 和 (22) 将式(46)改写为

$$V_2 = \frac{2(1 + H_2'^2)}{\alpha_2 + H_2'^2\beta_2 + 2(x_2'\gamma_2 + y_2'\delta_2)} v_2 + \frac{2[(\alpha_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2) + H_2'^2(\beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2) + 2(\alpha_2 + \beta_2)(x_2'\gamma_2 + y_2'\delta_2)]}{[\alpha_2 + H_2'^2\beta_2 + 2(x_2'\gamma_2 + y_2'\delta_2)]^2} H_{M_2}^2 v_2' \quad (49)$$

因此这时用方法 2 算得的调和常数的总方差为

$$V_2 = \frac{2}{N} v_2 + \frac{2}{1 + H_2'^2} H_{M_2}^2 v_2' \quad (50)$$

比较(48)和(50)可知,尽管对方法 1 来讲,天文条件是最优越的,但是由观测记录引起的调和常数误差的方差却比方法 2 的大一倍。比较这两式还可知道,当

$$\frac{1}{1 + H_2'^2} v_2' < \frac{1}{N} \frac{v_2}{H_{M_2}^2} \quad (51)$$

时,显然方法 2 比方法 1 好。例如观测所得的 A_{2i} , B_{2i} 的标准误差是 H_{M_2} 的 10%, 而 x_2' , y_2' 的标准误差只达到 0.05, 那么对于 $N \leq 4$ 的情况,应当采用方法 2, 而没有理由采用方法 1。因此如果能够得到可靠的差比数,我们宁愿用方法 2 计算。

但是如前面已经指出的,当 N 很大,且天文条件良好,方法 1 的误差从理论上讲可以

任意地小;但是方法 2 的 V_2 中来自差比数的误差却不能小于某一数值,故这时宜采用方法 1。此外,当观测地点的差比数无法事先知道时,也应当采用方法 1。

对于一般的情形,如果已掌握 v_2 和 v'_2 的数值,最好应用式(34)和(46)分别算出两组调和常数的方差并比较它们的大小,从而得出哪种方法较好的结论。

这里可附带指出,上述两种方法可以看作是一个更普遍的方法的两个极端情况。事实上,我们可以把式(20)和式(25)即(41)联合写在一起而构成一个由 $2(N+1)$ 个方程组成的线性方程组:

$$\begin{cases} w(x'_2 x_{M_2} - y'_2 y_{M_2} - x_{S_2}) = 0 \\ w(y'_2 x_{M_2} + x'_2 y_{M_2} - y_{S_2}) = 0 \\ a_{Mi} x_{M_2} - b_{Mi} y_{M_2} + a_{Si} x_{S_2} - b_{Si} y_{S_2} = A_{2i} \\ b_{Mi} x_{M_2} + a_{Mi} y_{M_2} + b_{Si} x_{S_2} + a_{Si} y_{S_2} = B_{2i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (52)$$

式中 w 为差比关系式的权系数。方法 1 是 $w = 0$ 的特例,方法 2 是 $w/N \rightarrow \infty$ 的特例。如令 w 等于非零的有限值,就能既吸取了方法 2 的有较小的观测误差影响系数的优点,又可克服该方法当 $N \rightarrow \infty$ 时 V_2 不趋于零的缺点。当然对于人工计算,由方程组(52)求最小二乘解要比前面两种方法都麻烦些,但是在使用电子计算机时,这种麻烦是微不足道的。另外,用方程组(52)计算时,首先必须确定适宜的 w 值,它应当跟 v_2 和 v'_2 的比值有关,更细致些,还应当取为与天文条件有关。关于这个问题的严格的数学讨论是困难的,这里就不打算作进一步的研究了。

四、方 法 3

前面所讨论的两种方法,都是首先由实测潮高 ζ 计算出每天的 F_q , f_q 值,然后用最小二乘法求解调和常数的。这对于借助于表格、台式计算机和数学用表等为工具的人工计算是必要的,但对于以电子计算机为工具的计算来说,虽然仍然是可行的,但会使编制程序变得繁琐。此外,如果某些周日观测的记录是不完整的,例如缺少几个小时的记录,那么这些观测记录的使用就有困难。因此这里拟介绍一种对实测潮高直接应用最小二乘法计算调和常数的方法,以供参考。

假设已知总共有 m 个潮高观测值 ζ 的一组观测序列,这 m 个 ζ 值可分为 N 段,即 N 个子序列,每个子序列都可认为具有相同的平均海面 X_0 。由式(2)知,这 m 个观测值可以给出包含 $12 + N$ 个未知数的共有 m 个方程的方程组。若不引入差比关系,则当 $m \geq 12 + N$ 时,可以用最小二乘法求得这 $12 + N$ 个未知数。今用 $m_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 表示第 i 个子序列的潮高值的个数,则有

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \quad (53)$$

实测潮高的序列可写为如下 $1 \times m$ 矩阵 Z :

$$Z = (\zeta^{1,1}, \zeta^{1,2}, \dots, \zeta^{1,m_1}, \zeta^{2,1}, \zeta^{2,2}, \dots, \zeta^{2,m_2}, \dots, \zeta^{N,1}, \zeta^{N,2}, \dots, \zeta^{N,m_N}) \quad (54)$$

欲求的未知数则可用如下 $(12 + N) \times 1$ 矩阵表示:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{12+N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{O_1} \cos g_{O_1} \\ H_{O_1} \sin g_{O_1} \\ H_{K_1} \cos g_{K_1} \\ H_{K_1} \sin g_{K_1} \\ \vdots \\ H_{MS_4} \cos g_{MS_4} \\ H_{MS_4} \sin g_{MS_4} \\ X_0^1 \\ X_0^2 \\ \vdots \\ X_0^N \end{pmatrix} \quad (55)$$

其中 $X_0^i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为第 i 个子序列的 X_0 值。今置

$$\begin{cases} a_1^{i,j} = [D_{O_1} \cos(15^\circ t - d_{O_1})]^{i,j} \\ a_2^{i,j} = [D_{O_1} \sin(15^\circ t - d_{O_1})]^{i,j} \\ a_3^{i,j} = [D_{K_1} \cos(15^\circ t - d_{K_1})]^{i,j} \\ a_4^{i,j} = [D_{K_1} \sin(15^\circ t - d_{K_1})]^{i,j} \\ \dots\dots\dots \\ a_{11}^{i,j} = [D_{MS_4} \cos(60^\circ t - d_{MS_4})]^{i,j} \\ a_{12}^{i,j} = [D_{MS_4} \sin(60^\circ t - d_{MS_4})]^{i,j} \\ a_{13}^{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{若 } i \neq 1 \\ 1 & \text{若 } i = 1 \end{cases} \\ a_{14}^{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{若 } i \neq 2 \\ 1 & \text{若 } i = 2 \end{cases} \\ \dots\dots\dots \\ a_{12+N}^{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{若 } i \neq N \\ 1 & \text{若 } i = N \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, N) \\ (j = 1, 2, \dots, m_i) \end{matrix} \quad (56)$$

式中右上角附标 i, j 代表第 i 个子序列中第 j 个观测时刻所对应的量值。于是由 m 个观测值可得如下包含 $12+N$ 个未知数的由 m 个方程构成的方程组:

$$\sum_{k=1}^{12+N} a_k^{i,j} x_k = \zeta^{i,j} \quad (57)$$

或写作

$$AX = Z^T \quad (58)$$

其中 Z^T 为 Z 的转置矩阵, 而 A 为以 $a_k^{i,j}$ 为元素的 $m \times (12+N)$ 矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{1,1} & a_2^{1,1} & \dots & a_{12+N}^{1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{1,m_1} & a_2^{1,m_1} & \dots & a_{12+N}^{1,m_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{2,1} & a_2^{2,1} & \dots & a_{12+N}^{2,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{2,m_2} & a_2^{2,m_2} & \dots & a_{12+N}^{2,m_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{N,1} & a_2^{N,1} & \dots & a_{12+N}^{N,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{N,m_N} & a_2^{N,m_N} & \dots & a_{12+N}^{N,m_N} \end{pmatrix} \quad (59)$$

方程组(58)一般是不相容的, 可以直接用最小二乘法处理, 其法方程为

$$A^T A X = A^T Z^T \quad (60)$$

在电子计算机上对这个方程组求解一般是毫无困难的。

如果观测地点的同族两个分潮调和常数的差比数为已知, 则可令

$$\begin{cases} D_1 \cos d_1 = D_{O_1} \cos d_{O_1} + H'_1 D_{K_1} \cos(d_{K_1} + g'_1) \\ D_1 \sin d_1 = D_{O_1} \sin d_{O_1} + H'_1 D_{K_1} \sin(d_{K_1} + g'_1) \\ D_2 \cos d_2 = D_{M_2} \cos d_{M_2} + H'_2 D_{S_2} \cos(d_{S_2} + g'_2) \\ D_2 \sin d_2 = D_{M_2} \sin d_{M_2} + H'_2 D_{S_2} \sin(d_{S_2} + g'_2) \\ D_4 \cos d_4 = D_{M_4} \cos d_{M_4} + H'_4 D_{MS_4} \cos(d_{MS_4} + g'_4) \\ D_4 \sin d_4 = D_{M_4} \sin d_{M_4} + H'_4 D_{MS_4} \sin(d_{MS_4} + g'_4) \end{cases} \quad (61)$$

从而将式(2)改写为

$$\zeta_t = X_0 + D_1 H_{O_1} \cos(15^\circ t - d_1 - g_{O_1}) + D_2 H_{M_2} \cos(30^\circ t - d_2 - g_{M_2}) + D_4 H_{M_4} \cos(60^\circ t - d_4 - g_{M_4}) \quad (62)$$

在已给出观测序列(54)的情况下, 类似地可根据式(62)得出包含 $6+N$ 个未知数的具有 m 个方程的方程组, 这个方程组也同样可直接用最小二乘法来处理。

由上面的过程可以看到, 采用直接最小二乘法后, 对潮高观测序列的要求要比用间接的、即通过计算中间值 F_q, f_q 的方法宽大得多。在这里并不要求每一观测子序列必须都是完整的周日逐时观测记录。但是不应当有这样的误解: 采用了直接最小二乘法后, 只要潮高观测记录的总个数 m 大于未知数的个数, 观测时间可以随意选择。事实上, 对于方法 1 或方法 2 来说天文条件不好的观测记录, 对于方法 3 也将仍然是不好的。例如当方程(21)的系数矩阵为病态时, 容易证明方程(60)的系数矩阵也将是病态的。

最后我们还想指出, 在使用电子计算机的情况下, 对短期观测记录的分析, 不一定要用准调和分潮方法, 也可以采用调和分潮方法。但是在这时, 一般也必须预先确定同族各调和分潮的调和常数之间一定形式的差比关系。

附录 式(44)的推导

(1) M_2 分潮调和常数的方差

x_{M_2}, y_{M_2} 的计算式是[式(30)]

$$\begin{cases} x_{M_2} = \frac{\Sigma(a_{2i}A_{2i} + b_{2i}B_{2i})}{\Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2)} \\ y_{M_2} = \frac{\Sigma(a_{2i}B_{2i} - b_{2i}A_{2i})}{\Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2)} \end{cases} \quad (63)$$

其中 a_{2i}, b_{2i} 由下式确定[式(39)]:

$$\begin{cases} a_{2i} = a_{Mi} + x'_2 a_{Si} - y'_2 b_{Si} \\ b_{2i} = b_{Mi} + x'_2 b_{Si} + y'_2 a_{Si} \end{cases} \quad (64)$$

而 x_{M_2}, y_{M_2} 误差的方差为[式(43)]

$$\begin{cases} v_{x_{M_2}} = \left[\Sigma \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 \right] v_2 + \left[\left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial x'_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial y'_2} \right)^2 \right] v'_2 \\ v_{y_{M_2}} = \left[\Sigma \left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 \right] v_2 + \left[\left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial x'_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial y'_2} \right)^2 \right] v'_2 \end{cases} \quad (65)$$

上式等号右边第一项是很明显的,结果如下:

$$\Sigma \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 = \Sigma \left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 = \frac{1}{\Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2)} = \frac{1}{\rho_2} \quad (66)$$

式中

$$\rho_2 = \Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2)$$

等号右边第二项推导如下:

$$\frac{\partial x_{M_2}}{\partial x_2'} = \Sigma \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial a_{2i}} \frac{\partial a_{2i}}{\partial x_2'} + \frac{\partial x_{M_2}}{\partial b_{2i}} \frac{\partial b_{2i}}{\partial x_2'} \right) = \frac{1}{\rho_2} \Sigma(a_{Si}A_{2i} + b_{Si}B_{2i}) - \frac{2}{\rho_2^2} \Sigma(a_{2i}a_{Si} + b_{2i}b_{Si}) \cdot \Sigma(a_{2i}A_{2i} + b_{2i}B_{2i}) \quad (67)$$

引入符号

$$\begin{cases} P_S = \Sigma(a_{2i}a_{Si} + b_{2i}b_{Si}) \\ Q_S = \Sigma(-a_{2i}b_{Si} + b_{2i}a_{Si}) \end{cases} \quad (68)$$

并将 A_{2i} , B_{2i} 用下列近似值代入[式(28)]:

$$\begin{cases} A_{2i} = a_{2i}x_{M_2} - b_{2i}y_{M_2} \\ B_{2i} = b_{2i}x_{M_2} + a_{2i}y_{M_2} \end{cases} \quad (69)$$

则有

$$\frac{\partial x_{M_2}}{\partial x_2'} = \frac{1}{\rho_2} (x_{M_2}P_S - y_{M_2}Q_S) - \frac{2}{\rho_2^2} x_{M_2}\rho_2P_S = -\frac{1}{\rho_2} (x_{M_2}P_S + y_{M_2}Q_S) \quad (70)$$

同理,

$$\begin{cases} \frac{\partial x_{M_2}}{\partial y_2'} = -\frac{1}{\rho_2} (x_{M_2}Q_S - y_{M_2}P_S) \\ \frac{\partial y_{M_2}}{\partial x_2'} = \frac{1}{\rho_2} (x_{M_2}Q_S - y_{M_2}P_S) \\ \frac{\partial y_{M_2}}{\partial y_2'} = -\frac{1}{\rho_2} (x_{M_2}P_S + y_{M_2}Q_S) \end{cases} \quad (70)$$

从而有

$$\left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial x_2'} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_{M_2}}{\partial y_2'} \right)^2 = \left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial x_2'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{M_2}}{\partial y_2'} \right)^2 = \frac{(P_S^2 + Q_S^2)H_{M_2}^2}{\rho_2^2} \quad (71)$$

最后,

$$v_{x_{M_2}} = v_{y_{M_2}} = \frac{1}{\rho_2} v_2 + \frac{(P_S^2 + Q_S^2)H_{M_2}^2}{\rho_2^2} v_2' \quad (72)$$

(2) S_2 分潮调和常数的方差

x_{S_2} , y_{S_2} 的计算式是[式(41)]

$$\begin{cases} x_{S_2} = x_2'x_{M_2} - y_2'y_{M_2} \\ y_{S_2} = y_2'x_{M_2} + x_2'y_{M_2} \end{cases} \quad (73)$$

它们的误差的方差为

$$\begin{cases} v_{x_{S_2}} = \left[\Sigma \left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 \right] v_2 + \left[\left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial x_2'} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial y_2'} \right)^2 \right] v_2' \\ v_{y_{S_2}} = \left[\Sigma \left(\frac{\partial y_{S_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial y_{S_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 \right] v_2 + \left[\left(\frac{\partial y_{S_2}}{\partial x_2'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{S_2}}{\partial y_2'} \right)^2 \right] v_2' \end{cases} \quad (74)$$

上式右边第一项容易计算,例如对第一式,有

$$\Sigma \left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \Sigma \left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 = \Sigma \left[\left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial x_{M_2}} \frac{\partial x_{M_2}}{\partial A_{2i}} + \frac{\partial x_{S_2}}{\partial y_{M_2}} \frac{\partial y_{M_2}}{\partial A_{2i}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_{S_2}}{\partial x_{M_2}} \frac{\partial x_{M_2}}{\partial B_{2i}} + \frac{\partial x_{S_2}}{\partial y_{M_2}} \frac{\partial y_{M_2}}{\partial B_{2i}} \right)^2 \right] = \frac{H_2'^2}{\rho_2} \quad (75)$$

第二式右边第一项的系数结果完全一样。

为了计算式(74)等号右边第二项, 令

$$\begin{cases} P_M = \Sigma(a_{2i}a_{Mi} + b_{2i}b_{Mi}) \\ Q_M = \Sigma(-a_{2i}b_{Mi} + b_{2i}a_{Mi}) \end{cases} \quad (76)$$

则下列两个等式成立:

$$\begin{cases} \rho_2 = \Sigma(a_{2i}^2 + b_{2i}^2) = \Sigma[a_{2i}(a_{Mi} + x'_2 a_{Si} - y'_2 b_{Si}) + b_{2i}(b_{Mi} + x'_2 b_{Si} + y'_2 a_{Si})] = P_M + x'_2 P_S + y'_2 Q_S \\ 0 = \Sigma(b_{2i}a_{2i} - a_{2i}b_{2i}) = \Sigma[b_{2i}(a_{Mi} + x'_2 a_{Si} - y'_2 b_{Si}) - a_{2i}(b_{Mi} + x'_2 b_{Si} + y'_2 a_{Si})] = Q_M + x'_2 Q_S - y'_2 P_S \end{cases} \quad (77)$$

从而由式(73), (70)和上式可得

$$\frac{\partial x_{S_2}}{\partial x_2} = x_{M_2} + x'_2 \frac{\partial x_{M_2}}{\partial x_2} - y'_2 \frac{\partial y_{M_2}}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho_2} (x_{M_2} P_M + y_{M_2} Q_M) \quad (78)$$

同理,

$$\begin{cases} \frac{\partial x_{S_2}}{\partial y_2} = \frac{1}{\rho_2} (x_{M_2} Q_M - y_{M_2} P_M) \\ \frac{\partial y_{S_2}}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_2} (x_{M_2} Q_M - y_{M_2} P_M) \\ \frac{\partial y_{S_2}}{\partial y_2} = \frac{1}{\rho_2} (x_{M_2} P_M + y_{M_2} Q_M) \end{cases} \quad (78)$$

因而最后有

$$v_{x_{S_2}} = v_{y_{S_2}} = \frac{H_2'^2}{\rho_2} v_2 + \frac{(P_M^2 + Q_M^2) H_{M_2}^2}{\rho_2^2} v_2' \quad (79)$$

参 考 文 献

- [1] 方国洪, 1974。潮汐分析和预报的准调和分潮方法, I. 准调和分潮。海洋科学集刊 9:1—15。
- [2] Doodson, A. T., 1954. The analysis of tidal observations for 29 days. *Int. Hydrogr. Rev.* 31(1).
- [3] Hydrographer of Navy, 1964. *Harmonic Tidal Analysis for Short Period Observations (Admiralty Tidal Handbook, No. 3, London)*.
- [4] Hydrographic Department, 1941. *Admiralty Tide Tables, Part III, Instructions and Tables (London)*.
- [5] Int. Hydrogr. Bureau, 1936. *Tides List of Harmonic Constants (Monaco)*.

QUASI-HARMONIC CONSTITUENT METHOD FOR ANALYSIS AND PREDICTION OF TIDES

II. ANALYSIS OF SHORT PERIOD OBSERVATIONS*

Fang Guohong

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The treatments of the observations of short period are necessary often for tidal streams and sometimes for tides. In the present paper some methods for extraction of harmonic constants from short period observations are suggested on the foundation of the quasi-harmonic expression (2) or (3).

Method 1 or 2 deals with the observational series, which consists of several sets, each of them including 24 records at hourly intervals. Both methods use Doodson's hourly multipliers (4) to separate the species 1, 2 and 4 for each set, then the least squares method is applied for determining the harmonic constants.

When the number of the sets $N \geq 2$, the method 1 is applicable for computing the harmonic constants of the constituents O_1 , K_1 , M_2 , S_2 , M_4 and MS_4 , while the method 2 may be applied for $N \geq 1$. In the later method the values of epoch-differences and amplitude-ratios between the two constituents of each species must be given in advance. The practical procedure of method 1 is shown in tables I—V, and if method 2 being used, then the tables III' and V' should be computed instead of tables III and V respectively.

The errors of the harmonic constants due to the random perturbations existing in the observations (for method 1 and 2) and the inaccurate values of the epoch-differences and amplitude-ratios (for method 2) are discussed theoretically. It is shown that the reliability of the results is relevant to the values of the amplitude coefficients D , especially to those of the epoch corrections d of the dates for observation, and therefore it is important that the dates for observation should satisfy certain astronomical condition. The accuracy of the two methods has also been compared.

Method 3 is preferable if the computations are carried out on an electronic computer. The observational series is divided into several sets too, each having nearly the same mean sea level. In this method the least squares method is applied to the observational series directly, so that the results obtained should have slightly higher accuracy, and at the same time this method permits some observational sets used having gaps or being fragmental.

* Contribution No. 365 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.